Theoretische Physik I

Präsenzübung Nr. 12 11./12.1.2005

P34 *Magnetische Monopole*

Wie wir in **H29** gesehen haben, verhalten sich die Maxwell-Gleichungen im Vakuum dual unter dem Austausch von elektrischem und magnetischen Feld. Dirac erkannte dies 1931, und untersuchte, ob ein magnetischer Monopol, d.i. das Analogon zu einer elektrischen Ladung, existieren könnte.

a) Wie müsste man $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ erweitern, um eine Dualität zur Gleichung $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{r})$ zu erlangen? Wie lautet dann das zugehörige magnetische Feld $\mathbf{B}$ für einen magnetischen Monopol im Ursprung mit der Stärke g?

b) Wie groß ist der magnetische Fluss Φ durch eine Sphäre mit Radius 1?

Dieser Schritt war noch recht einfach. Komplizierter ist die Diskussion des zugehörigen Vektorpotentials $\mathbf{A}$:

c) Probieren Sie den Ansatz

$$A_x^+ = \frac{C_1^+ y}{r(r+z)} \ , \quad A_y^+ = \frac{C_2^+ x}{r(r+z)} \ , \quad A_z^+ = 0 \ ,$$

und bestimmen Sie die Konstanten C_1^+ und C_2^+. In welchem Bereich des $\mathbb{R}^3$ sind $\mathbf{A}^+$ und $\mathbf{B}^+ = \nabla \times \mathbf{A}^+$ definiert?

d) Was gilt hingegen für den Ansatz

$$A_x^- = \frac{C_1^- y}{r(r-z)} \ , \quad A_y^- = \frac{C_2^- x}{r(r-z)} \ , \quad A_z^- = 0 \ ?$$

e) Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten gilt:

$$A^+(\mathbf{r}) = \frac{g(1-\cos\vartheta)}{r\sin\vartheta}\mathbf{e}_\varphi \ , \quad A^-(\mathbf{r}) = -\frac{g(1+\cos\vartheta)}{r\sin\vartheta}\mathbf{e}_\varphi \ .$$

f) Die beiden Vektorpotentiale sind durch eine Eichtransformation $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\Lambda$ miteinander verbunden. Wie lautet Λ? In welchem Bereich des $\mathbb{R}^3$ ist diese Eichtransformation definiert? Bedenken Sie, dass $\mathbf{A}$ nur modulo Eichtransformationen physikalisch relevant ist. Wie kann man also das Problem der singulären Vektorpotentiale lösen?

g) Mathematisch ausführlicher formuliert taucht bei den Eichtransformationen außerdem eine Funktion $f_{+-} := \exp(\mathrm{i}\Lambda)$ auf, die für eine Umgebung von $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wohldefiniert sein muss. Was folgt daraus für g? Dies ist die Dirac-Quantisierungsbedingung für den magnetischen Monopol.

Anmerkung: Die Singularität des Eichpotentials in bestimmten Bereichen ist wirklich kein Problem, wie man anhand von komplexeren Theorien feststellen kann, in die der magnetische Monopol eingebettet werden kann, ohne dass Singularitäten auftreten.