Theoretische Physik I

Präsenzübung Nr. 5 9./10.11.2004

P13 *Rotationen im* $\mathbb{R}^3$

Drehungen sind Abbildungen $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Länge von Vektoren invariant lassen.

a) Zeigen Sie, dass Matrizen, die Drehungen beschreiben, orthogonal sein müssen. Warum kann man sich auf die speziellen orthogonale Matrizen: $\mathsf{SO}(3) := \{R \in \mathsf{Mat}(3,\mathbb{R}) | \det R = +1, R^T R = \mathbb{1}\}$ beschränken?

b) Verifizieren Sie, dass die Drehmatrizen eine Gruppe bilden.

c) Geben Sie die Drehmatrix $R_z(\varphi_z)$ für eine Drehung eines Vektors $\mathbf{r}$ um die z-Achse und den Winkel φ_z an: $\mathbf{r}' = R_z(\varphi_z)\mathbf{r}$. Geben Sie ebenso die Drehmatrizen für Drehungen um die x-Achse (φ_x, R_x) sowie um die y-Achse (φ_y, R_y) an.

Anmerkung: Gruppen, die wie die $\mathsf{SO}(3)$ auch als eine reelle C^∞-Mannigfaltigkeiten aufgefasst werden können, nennt man *Liegruppen*. Sie spielen eine große Rolle bei Symmetriebetrachtungen in der Physik.

P14 *Generatoren von Rotationen*

Betrachten wir eine analytische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so stellen wir fest, dass Translationen mit Hilfe der Taylorreihe erfasst werden können:

$$f(x_0 + a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x) \Big|_{x=x_0} a^n \right) = \mathrm{e}^{a\frac{\partial}{\partial x}} f(x) \Big|_{x=x_0} .$$

Man sagt, der Operator $\frac{\partial}{\partial x}$ *erzeugt* Translationen, oder auch $\frac{\partial}{\partial x}$ ist der *Generator* für Translationen. Wir wollen nun die Generatoren für Drehungen im $\mathbb{R}^3$ erarbeiten.

a) Entwickeln Sie $R_z(\varphi_z)$ aus **P13** c) in φ_z bis einschließlich $\mathcal{O}(\varphi_z^2)$. Die Matrix, die als Koeffizient von φ_z^1 in der Entwicklung auftaucht, sei J_z.

b) Verifizieren Sie, dass $\mathrm{e}^{J_z \varphi_z} = R_z(\varphi_z)$ gilt, wobei $\mathrm{e} : \mathsf{Mat}(n,\mathbb{R}) \to \mathsf{Mat}(n,\mathbb{R})$ über die Taylorreihe der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$ definiert ist. Verwenden Sie nur die relevante 2×2-Untermatrix.

c) Verfahren Sie wie unter a) auch für Drehungen um die x-Achse (R_x, J_x) sowie um die y-Achse (R_y, J_y). Berechnen Sie anschließend alle möglichen *Kommutatoren* $[J_i, J_j] := J_i J_j - J_j J_i$ für $i, j = x, y, z$.

d) Die Generatoren J_i erzeugen eine *Algebra*, d.i. ein Vektorraum V mit einer zusätzlichen Multiplikation $* : V \times V \to V$. Wie muss man die Multiplikation hier definieren? Verifizieren Sie, dass diese Algebra nicht assoziativ ist, aber dafür $((J_i * J_j) * J_k) + ((J_j * J_k) * J_i) + ((J_k * J_i) * J_j) = 0$ erfüllt.

Anmerkung: Die Algebra der Generatoren J_i nennt man die Liealgebra $\mathfrak{so}(3)$ der Liegruppe $\mathsf{SO}(3)$. Man kann sich hierunter den Tangentialraum der Liegruppe am $\mathbb{1}$-Element vorstellen.
