Theoretische Physik I

Präsenzübung Nr. 4 2./3.11.2004

P11 *kleine Schwingungen*

In dieser Aufgabe wollen wir den Formalismus für kleine Schwingungen erarbeiten. Stellen Sie sich N Atome eines kristallinen Festkörpers vor, deren Position im Raum durch die N Koordinaten x_i, $i = 1, ..., N$ gegeben sei. Die Wechselwirkung der einzelnen Atome untereinander sei durch ein Potential $V(x_1, ..., x_n)$ beschrieben.

a) Wie lauten hier die allgemeinen Bewegungsgleichungen?

Betrachten wir nun den Festkörper bei kleinen Temperaturen, so werden die Atome nur geringfügig von einer Gleichgewichtsposition ausgelenkt, die das Potential minimiert.

b) Nähern Sie das Potential um das Minimum $\bar{x}_i$ durch ein Polynom zweiten Grades in den x_i. Bestimmen Sie die Koeffizienten durch Ableitungen der Potentialfunktion (Taylorentwicklung). Was gilt für die ersten Ableitungen? Warum?

c) Führen Sie nun die Abkürzung $A_{ij} = \frac{1}{m_i} \partial^2_{x_i, x_j}\Big|_{x=\bar{x}} V(x)$ sowie $u_i := x_i - \bar{x}_i$ ein, und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen dann folgendermaßen lauten:

$$\ddot{u}_i = -\sum_j A_{ij} u_j \ . \tag{1}$$

Die letzte Gleichung ist eine lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung, eine Art Verallgemeinerung des harmonischen Oszillators. Wir wählen deshalb den Ansatz $u_i(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} z_i)$.

d) Verwenden Sie diesen Ansatz, um Gleichung (1) in die Form einer Eigenwertgleichung für eine $N \times N$-Matrix zu bringen.

e) Wie viele *Eigenfrequenzen* ω_a existieren? Was würde es bedeuten, wenn eine solche Eigenfrequenz imaginäre Anteile hätte? Was folgt hieraus für die Matrix A?

Die zu ω_a gehörenden Eigenvektoren $\mathbf{z}_a$ bezeichnet man als *Eigenmoden*. Diese sind für verschiedene Eigenfrequenzen offensichtlich linear unabhängig. Man kann nun einen die Anfangsbedingungen beinhaltenden Vektor $\mathbf{z}$ in Eigenmoden entwickeln: $\mathbf{z} = \sum_a c_a \mathbf{z}_a$. Dann ist die Lösung des Problems gegeben durch

$$\mathbf{u}(t) = \mathrm{Re} \sum_a c_a \mathbf{z}_a \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \ . \tag{2}$$

Die Bewegungen, für die alle der Koeffizienten c_a bis auf einen verschwinden, heißen ebenfalls Eigenmoden. In der nächsten Aufgabe werden wir diesen Formalismus anwenden.

Theoretische Physik I

Präsenzübung Nr. 4 2./3.11.2004

P12 *Zwei Wagen auf einer Schiene*

Betrachten Sie folgende Konfiguration: Zwei Wagen mit gleicher Masse befinden sich auf einer Schiene mit Länge $2a$, die an ihren Enden von festen Wänden begrenzt wird. Zwischen der linken Wand und dem ersten Wagen, dem ersten Wagen und dem zweiten Wagen sowie zwischen dem zweiten Wagen und der rechten Wand befinden sich jeweils Federn mit Federkonstanten d, c und d.

a) Fertigen Sie eine Skizze an. Welche Arten von Schwingungen erwarten Sie?

b) Stellen Sie die Potentialfunktion auf. Die Koordinaten der beiden Wagen seien x_1 und x_2, der Nullpunkt liege in der Mitte zwischen den beiden Wänden.

c) Berechnen Sie die Gleichgewichtslage $\bar{x}$ und verwenden Sie den Formalismus für kleine Schwingungen, um die Eigenmoden des Systems zu bestimmen. Wie viele gibt es?

d) Welche Bewegung gehört zur Anfangsbedingung $u_1(0) = -u_2(0) = u_0$?