Theoretische Physik I

Hausübung Nr. 11 — Abgabe: 18.1.2005

H30 *Orthogonalität der Legendre-Polynome* **[2+3 Punkte]**

In dieser Aufgabe möchten wir die Orthogonalitätsrelation für Legendre-Polynome herleiten. Das Skalarprodukt sei gegeben durch $(P_\ell, P_{\ell'}) := \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x P_\ell(x) P_{\ell'}(x)$

a) Zeigen Sie, das $(P_\ell, P_{\ell'})$ für $\ell \neq \ell'$ verschwindet, indem Sie die Differentialgleichung verwenden, mit der wir die Legendre-Polynome definiert haben. Zusätzlich benötigen Sie partielle Integration.

b) Berechnen Sie den Wert von $|P_\ell|^2 = (P_\ell, P_\ell)$, indem Sie die Formel von Rodrigues verwenden:

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} (x^2 - 1)^\ell \, .$$

H31 *Entwicklung nach Legendre-Polynomen* **[2 Punkte]**

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

nach den Legendre-Polyomen P_ℓ. Benutzen Sie hierzu $(P_\ell, P'_\ell) = \delta_{\ell\ell'} \frac{2}{2\ell+1}$ sowie die Formel von Rodrigues, und geben Sie die ersten drei Terme explizit an.

H32 *Statisches Magnetfeld* **[3 Punkte]**

Welche Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ist notwending, um das konstante Magnetfeld $\mathbf{B} = f(\rho)\mathbf{e}_z$ in Zylinderkoordinaten (ρ, θ, z) herzustellen? Was gilt speziell in dem Fall $f(\rho) = B_0 \theta(\rho - R_1)\theta(R_2 - \rho)$ mit $R_2 > R_1$, wenn θ die Heaviside-Funktion ist? Fertigen Sie hierzu eine Skizze an.

H33 *Homogen geladene, rotierende Kugel* **[1+4 Punkte]**

Eine Kugel mit homogener Oberflächenladungsdichte drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse. Wir wollen im folgenden das $\mathbf{B}$-Feld aus einem Ansatz bestimmen.

a) Welche Ausdrücke ergeben sich für $\rho(\mathbf{r})$ und $\mathbf{j}(\mathbf{r})$?

b) Als Ansatz für $\mathbf{B}$ sei

$$\mathbf{B} = f(r) z \mathbf{r} - g(r) \mathbf{e}_3$$

gegeben. Wie weit sind die Funktionen $f(r)$ und $g(r)$ durch die Maxwellgleichungen eingeschränkt? Was gilt für die beiden verbleibenden Konstanten?

Theoretische Physik I

Hausübung Nr. 11 Abgabe: 18.1.2005

H34 *Geladener Glasstab* **[2+1 Punkte]**

Berechenen Sie das elektrostatische Potential $\phi(\mathbf{r})$ eines homogen geladenen, unendlich dünnen Glasstabes, der zwischen $z = -a$ und $z = a$ entlang der z-Achse angebracht ist.

a) Geben Sie zunächst die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ in kartesischen Koordinaten an, und wenden Sie dann den Satz von Greene an.

b) Zeigen Sie, dass sich im Grenzfall $a \to 0$ das Coulomb-Potential ergibt.

H35 *Biot-Savart-Gesetz I* **[2 Punkte]**

Im dreidimensionalen Raum verlaufe entlang der positiven Abschnitte der x- und y-Achsen ein Draht, in dem von $x = \infty$ nach $y = \infty$ der konstante Strom I fließe. Berechnen Sie das erzeugte Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

H36 *Biot-Savart-Gesetz II* **[1+2+1 Punkte]**

Zu einem Kreisstrom mögen die Felder $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nur in unmittelbarer Umgebung des Kreismittelpunktes interessieren. In der Biot-Savart-Formel für $\mathbf{A}$ kann man folglich den Integranden entwickeln.

a) Wie sieht diese Entwicklung aus?

b) Warum hat das Resultat die Gestalt $\mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ und welche Bedeutung hat der konstante Vektor $\mathbf{c}$?

c) Wie lautet das Magnetfeld in der Kreismitte?

H37 *Relativistischer Weihnachtsmann* **[5 Bonuspunkte]**

Der Weihnachtsmann fliegt auf seinem Schlitten (Ruhelänge $2L$) mit konstanter Geschwindigkeit v auf eine Scheune der Ruhelänge L zu. Die Scheune besitzt an beiden Enden Tore, allerdings kann aufgrund einer Verbindung zwischen den Toren immer nur ein Tor gleichzeitig geöffnet sein. Zunächst ist das dem Weihnachtsmann nähere Tor geöffnet und das andere geschlossen. Der Besitzer der Scheune beobachtet das Geschehen, und schließt verzweifelt das erste Tor (was gleichzeitig das zweite öffnet), sobald sich das hintere Ende des Schlittens in der Scheune befindet. Bleibt seine Scheune unbeschädigt oder muss man in diesem Jahr mit deutlichen Verzögerungen bei der Geschenkausgabe rechnen?