Theoretische Physik I

Hausübung Nr. 10 — Abgabe: 21.12.2004

H27 *Spiegelladung* **[1+1+1+1 Punkte]**

Außerhalb einer geerdeten metallischen Hohlkugel mit Radius R befindet sich eine Punktladung q. Der Mittelpunkt der Hohlkugel sei als Ursprung gewählt. Mit der Methode der Spiegelladungen soll das Potential $\Phi(r)$ bestimmt werden.

a) Fertigen Sie eine Skizze an, und machen Sie einen Ansatz für die Position der Spiegelladung, der die Symmetrie des Problems berücksichtigt.

b) Was ergibt sich aus der Forderung, dass die Kugeloberfläche eine Äquipotentialfläche sein muss?

c) Berechnen Sie durch $-\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right|_{|r|=R}$ die auf der Kugeloberfläche induzierte Flächenladungsdichte.

d) Welches Potential ergibt sich, wenn die Ladung sich innerhalb der Hohlkugel befindet?

H28 *Fourier-Transformation* **[2+3 Punkte]**

Eine zeitunabhängige Ladungsverteilung habe die Form $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\kappa r}$ für $\rho_0,\ \kappa > 0$. Das durch $\rho(\mathbf{r})$ erzeugte elektrische Feld soll nicht durch Ansatz, sondern mit Hilfe der Fourier-Transformation bestimmt werden.

a) Wie lautet $\tilde{\rho}(\mathbf{k})$, die Fourier-Transformierte von $\rho(\mathbf{r})$? *Hinweis:* Sie können $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r \sin(kr)\mathrm{e}^{-\kappa r} = -\partial_\kappa \int_0^\infty \mathrm{d}r\, \sin(kr)\mathrm{e}^{-\kappa r}$ verwenden.

b) Geben Sie die Lösung $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$ der Maxwellgleichungen an, und berechnen Sie dann $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ durch Rücktransformation. *Hinweis:* Erinnern Sie sich, dass bei einer Fourier-Transformation $f(\mathbf{x}) \to \tilde{f}(\mathbf{k})$ der Operator ∇ in $\mathrm{i}\mathbf{k}$ übergeht. Sie können außerdem ohne Beweis das Integral $\int_0^\infty \mathrm{d}k\, \frac{\sin(kr)}{k}\frac{1}{(k^2+\kappa^2)^2} = \frac{\pi}{2\kappa^4}\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\kappa r}(\kappa r + 2)\right)$ verwenden.

H29 *Elektromagnetische Dualität* **[2+1 Punkte]**

Das elektrische und magnetische Feld lassen sich folgendermaßen zu einem komplexen Feld zusammenfassen:

$$\boldsymbol{\psi} := c(\mathbf{E} + \mathrm{i}\mathbf{B})$$

a) Wie lauten die Maxwellgleichungen für $\boldsymbol{\psi}$, und wie folgt die Kontinuitätsgleichung?

b) Zeigen Sie, dass die Maxwellgleichungen im Vakuum ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) unter der Dualitätstransformation

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}' = \mathbf{E}\cos\theta + \mathbf{B}\sin\theta\ , \quad \mathbf{B} \to \mathbf{B}' = -\mathbf{E}\sin\theta + \mathbf{B}\cos\theta$$

für konstante („globale") θ invariant sind. Wie transformiert sich $\boldsymbol{\psi}$?

Dualitäten spielen neben Symmetrien eine große Rolle in der modernen Physik. Obige Dualität führt nach der Transformation für $\theta = \frac{\pi}{2}$ zur Definition der zur elektrischen Ladung dualen magnetischen Monopole ($\to$ Google).
