Theoretische Physik I

Hausübung Nr. 5 Abgabe: 16.11.2004

H12 *Kanonische Transformation für den harmonischen Oszillator* **[3 Punkte]**

Unterwerfen Sie den 1-dimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

einer kanonischen Transformation mit der Erzeugenden $\Phi(q, Q) = \frac{m\omega q^2}{2} \cot Q$. Lösen Sie dann die Bewegungsgleichungen in den Koordinaten Q und P und rechnen Sie die Lösungen auf die Koordinaten q und p um.

H13 *Probeteilchen im Gravitationsfeld der Sonne* **[7 Punkte]**

Die Bewegung eines Probeteilchens der Masse m im Gravitationsfeld der Sonne wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die Wirkung

$$S = \frac{m}{2} \int \mathrm{d}\lambda \left(c^2 \dot{t}^2 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 \dot{\vartheta}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right)$$

beschrieben. Hierbei sind c die Lichtgeschwindigkeit, r_0 eine Konstante und λ der Parameter der Bahn des Teilchens in der Raumzeit, die durch $(r(\lambda), \vartheta(\lambda), \varphi(\lambda), t(\lambda))$ beschrieben wird.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für ϑ durch $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ gelöst werden, und verwenden Sie diese Lösung im Folgenden.

b) Die Koordinaten φ und t sind offensichtlich zyklisch. Berechnen Sie die entsprechenden Erhaltungsgrößen und bezeichnen Sie diese mit $-L_z$ und $\frac{E}{c^2}$.

c) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion selbst eine Erhaltungsgröße ist, und geben Sie ihr den Wert $\frac{1}{2}mc^2$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Lagrangefunktion mit der Hamiltonfunktion übereinstimmt. Dann folgt der Beweis dem der Energieerhaltung in der klassischen Mechanik.

d) Leiten Sie eine Differentialgleichung für $r(\lambda)$ ab. Bestimmen und zeichnen Sie das effektive Potential, d.h. $U_{\text{eff}}(r)$ mit $m\ddot{r} = -\partial_r U_{\text{eff}}(r)$

e) Falls $L_z \ll mrc$, d.h. die Bahngeschwindigkeit $r\dot{\phi}$ sehr klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c ist, geht die Allgemeine Relativitätstheorie in die Ihnen bekannte Newtonsche Gravitationstheorie über mit $U_{\text{eff}} = -\frac{\gamma m M}{r} + \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{mr^2}$. Bestimmen Sie so die Konstante r_0. Wie groß ist r_0 für die Sonne?

H14 *Virialsatz* **[2 Punkte]**

Der Virialsatz besagt, dass bei einer Bewegung in einem reinen Potential $V \sim x^n$ die zeitlichen Mittelwerte der kinetischen und der potentiellen Energie folgendermaßen zusammenhängen: $2\bar{T} = n\bar{V}$. Verifizieren Sie dies durch explizite Rechnung am eindimensionalen harmonischen Oszillator.
