Theoretische Physik I

Hausübung Nr. 2 — Abgabe: 26.10.2004

H04 *Parabolische Zylinderkoordinaten* **[1+2+1 Punkte]**

Seien (x^1, x^2, x^3) die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^3$. Aus der Transformation

$$x^1 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)\ , \quad x^2 = uv\ , \quad x^3 = z$$

erhält man die *parabolischen Zylinderkoordinaten* (u, v, z).

a) Zeigen Sie, dass sich jeder Punkt des $\mathbb{R}^3$ mittels parabolischer Zylinderkoordinaten beschreiben lässt.

b) Bestimmen Sie die drei Einheitsvektoren $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ und $\mathbf{e}_z$, und veranschaulichen Sie durch eine Skizze den Verlauf der Koordinatenlinien. Geben Sie außerdem den Nabla-Operator ∇ in parabolischen Zylinderkoordinaten an.

c) Stellen Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für ein freies Punktteilchen der Masse m in parabolischen Zylinderkoordinaten auf.

H05 *Achterbahn* **[3 Punkte]**

Eine antriebslose und reibungsfreie Achterbahn soll auf einer geneigten Bahn starten und anschließend einen senkrechten Kreislooping mit Radius R durchfahren. In welcher Höhe muss der Startpunkt liegen, damit man ohne Anlegen von Sicherheitsgurten mit der Bahn fahren kann? Geben Sie für diesen Fall die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ sowie die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ im Looping an.
Hinweis: Beschreiben Sie die Bewegung durch einen Vektor $\mathbf{r}(\varphi(t))$ und betrachten Sie lediglich den Looping. Verwenden Sie außerdem den Energieerhaltungssatz.

H06 *Horizontale Ablenkung im Schwerefeld der Erde* **[1+1+3 Punkte]**

Betrachten Sie die Erde im ruhenden Inertialsystem S mit Ursprung im Erdmittelpunkt. Definieren Sie nun ein neues kartesisches Koordinatensystem S' an einem Punkt der Erdoberfläche, dessen Verbindungslinie zum Erdmittelpunkt mit der Äquatorialebene den Winkel ϕ einschließe. Die z'-Achse zeige nach oben, die x'-Achse nach Süden und die y'-Achse nach Osten. Verschieben Sie nun das Koordinatensystem derart, dass die Ursprünge von S und S' übereinanderliegen. Außerdem rotiere das System S' mit der Erde mit gemeinsamer Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Die Bewegungsgleichung für einen punktförmigen Körper der Masse m in S' ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{p}}' = -\nabla U(\mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\ . \qquad (1)$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an. Versuchen Sie, die Terme in (1) zu identifizieren Ist der Übergang von S nach S' eine Galileitransformation?

b) Drücken Sie $\boldsymbol{\omega}$ in den Koordinaten von S' aus.

c) Nehmen Sie an, dass die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ klein sei, so dass Terme $\sim \omega^2$ vernachlässigbar sind, und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Wie groß ist die horizontale Ablenkung für einen Fall aus 100m Höhe am Äquator? Kommentieren Sie kurz das Ergebnis.
