Allgemeine Relativitätstheorie

11. Übungsblatt — Abgabe: 20.7.2004

H31 *Innere Schwarzschildlösung* **[4+2 Punkte]**

Um das Gravitationsfeld im Inneren eines Himmelskörpers bestimmen zu können, benötigen wir ein Modell über dessen Aufbau, d.h. Annahmen über die Form seines Energie-Impuls-Tensors. Unter Vernachlässigung von typischen thermodynamischen Effekten wie Wärmeleitung und innerer Reibung ist die ideale Flüssigkeit mit

$$T_{ij} = pg_{ij} + (\rho + p)v_i v_j \tag{1}$$

eine brauchbare Näherung. Hierbei sind p der Druck, ρ die Massendichte der Flüssigkeit und v^i die Komponenten der Vierergeschwindigkeit. Alle diese Größen seien Funktionen von r.

a) Zeigen Sie, dass sphärisch symmetrische, statische Raumzeiten, die den Einstein-Gleichungen

$$\mathrm{Ric} - \tfrac{1}{2}Rg = \kappa T \tag{2}$$

genügen, auf einer offenen Umgebung durch

$$g = \mathrm{e}^{2\phi(r)}\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - h(r)\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_{S^2} \tag{3a}$$

gegeben sind, wobei h_{S^2} die Metrik auf der 2-Sphäre ist, und

$$h(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \quad \text{mit} \quad m(r) = \frac{\kappa}{2}\int_0^r \mathrm{d}r' \rho(r') r'^2 \tag{3b}$$

sowie

$$\frac{\mathrm{d}\phi(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{m(r) + \frac{\kappa}{2}r^3 p(r)}{r(r - 2m(r))}\ . \tag{3c}$$

Hinweis: Statische Symmetrie verlangt, dass die Vierergeschwindigkeit v^i der Flüssigkeit in die selbe Richtung wie das statische Killingvektorfeld zeigt, also

$$(v^i) = (-\mathrm{e}^{-\phi(r)}, 0, 0, 0)\ . \tag{4}$$

b) Um obige Gleichungen zu erhalten, wurden nicht alle Feldgleichungen benötigt. Leiten Sie aus der verbleibenden Gleichung die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}p(r)}{\mathrm{d}r} = -(p(r) + \rho(r))\frac{m(r) + \frac{\kappa}{2}r^3 p(r)}{r(r - 2m(r))} \tag{5}$$

ab. Diese heißt *Tolman-Oppenheimer-Volkov-Gleichung.*

Allgemeine Relativitätstheorie

11. Übungsblatt Abgabe: 20.7.2004

H32 *Reissner-Nordstrøm-Lösung* **[1+1+4 Punkte]**

Betrachten Sie die Wirkung

$$S = S_{EH} + S_M \ , \tag{6}$$

wobei S_{EH} die Einstein-Hilbert-Wirkung ist, und S_M durch

$$S_M = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4 u \sqrt{g} F_{ij} F^{ij} \ . \tag{7}$$

gegeben sei. Hierin ist $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ der elektromagnetische Feldstärketensor.

a) Zeigen Sie, dass der zu S_M gehörende Energie-Impuls-Tensor (bis auf sog. Verbesserungsterme)

$$T_{ij} = +\frac{1}{4} g^{kl} F_{ik} F_{jl} - \frac{1}{16} g_{ij} F_{kl} F^{kl} \tag{8}$$

lautet.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für das Viererpotential A_i gegeben sind durch

$$\nabla_i F^{ij} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_{[i} F_{jk]} = 0 \ , \tag{9}$$

wobei die zweite Gleichung aufgrund der Bianchi-Identität trivialerweise erfüllt ist.

c) Beschränken wir uns nun auf sphärisch symmetrische Lösungen zu den gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen. Die allgemeinste Form des elektromagnetischen Feldstärketensors ist daher

$$F_{tr} = f(r,t) = -F_{rt} \tag{10}$$

$$F_{\vartheta\varphi} = g(r,t)\sin(\vartheta) = -F_{\varphi\vartheta} \ , \tag{11}$$

wobei f und g durch die Feldgleichungen bestimmte Funktionen sind. Die Komponenten F_{tr} und $F_{\vartheta\varphi}$ entsprechen einem radialen elektrischen bzw. radialen magnetischen Feld. Zeigen Sie, dass

$$g = h(r)\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - h(r)^{-1}\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2 h_{S^2} \tag{12a}$$

mit

$$h(r) = 1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{G_N(p^2+q^2)}{r^2} \tag{12b}$$

und

$$F_{tr} = -\frac{q}{r^2} \ , \quad F_{\vartheta\varphi} = p\sin\vartheta \tag{12c}$$

die gekoppelten Einstein-Maxwell-Gleichungen erfüllen. Hierbei sind M die Masse, q die elektrische und p die magnetische Ladung des Himmelskörpers. Die Lösung (12a)-(12c) heißt *Reissner-Nordstrøm-Lösung.*