Allgemeine Relativitätstheorie

10. Übungsblatt | Abgabe: 13.7.2004

H29 *Periheldrehung* **[4+5 Punkte]**

In der Vorlesung hatten wir folgende Beziehung für die Bewegung eines massiven Teilchens im Schwarzschildfeld abgeleitet:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{mr_0}{2r} + \frac{L^2}{2mr^2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{E^2}{m^2}-1\right) , \tag{1}$$

wobei $r_0 = 2G_N M$ der Schwarzschildradius und $L = mr^2\dot{\varphi}^2$ der Drehimpuls sind.

a) Indem wir $u(\varphi) = \frac{r_0}{r(\varphi)}$ ersetzten und anschließend differenzierten, erhielten wir die Differentialgleichung

$$u'' + u = \alpha + \beta u^2 \tag{2}$$

mit Konstanten α und β, deren explizite Form im Folgenden nicht interessiert. Berechnen Sie die Greensche Funktion für (2), d.h. eine Funktion G mit

$$G'' + G = \delta , \tag{3}$$

wobei δ die Deltadistribution ist. Leiten Sie anschließend hieraus mittels Konturintegration die Lösung u_1 aus der Vorlesung ab:

$$u_1'' + u_1 = \alpha + \beta^2 u_0^2 \tag{4}$$

mit $u_0 = \alpha(1 + \varepsilon\cos\varphi)$.

b) Zeigen Sie, indem Sie die Substitution $u(\varphi) = \frac{r_0}{r(\varphi)}$ in (1) ausführen, dass für $L \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \pm\sqrt{(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)} \tag{5}$$

gilt, wobei die Nullstellen $(u_1 < u_2 < u_3)$ mit $\kappa = \frac{L}{mr_0}$ die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 , \tag{6}$$

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = \frac{1}{\kappa^2} , \tag{7}$$

$$u_1u_2u_3 = \frac{1}{\kappa^2}\left(\frac{E^2}{m^2}-1\right) . \tag{8}$$

Schreiben Sie den Winkel $\frac{1}{2}\delta\varphi$, der zwischen u_1 und u_2 durchlaufen wird, als Integral über $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}$. Verwenden Sie für dieses Integral die normierte Variablen

$$0 \leq y = \sqrt{\frac{u-u_1}{u_2-u_1}} \leq 1 \quad \text{sowie} \quad \kappa^2 = \frac{u_2-u_1}{u_3-u_1} . \tag{9}$$

Allgemeine Relativitätstheorie

10. Übungsblatt Abgabe: 13.7.2004

H30 *Schwarzschildmetrik in isotropen Koordinaten* **[1+2 Punkte]**

Sei (M, g) eine dreidimensionale sphärisch symmetrische Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Zeigen Sie, dass M konform flach ist, d.h.

$$g = H(\tilde{r})\left(\mathrm{d}\tilde{r} \otimes \mathrm{d}\tilde{r} + \tilde{r}^2 h_{S^2}\right) \ , \tag{10}$$

wobei $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und h_{S^2} die Metrik der 2-Sphäre ist. Diese Koordinaten heißen *isotrope* Koordinaten.

b) Zeigen Sie, dass die Schwarzschildmetrik in isotropen Koordinaten wie folgt lautet:

$$g = \left(\frac{1 - \frac{r_0}{4\tilde{r}}}{1 + \frac{r_0}{4\tilde{r}}}\right)^2 \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \left(1 + \frac{r_0}{4\tilde{r}}\right)^4 \left(\mathrm{d}\tilde{r} \otimes \mathrm{d}\tilde{r} + \tilde{r}^2 h_{S^2}\right) \ , \tag{11}$$

wobei r_0 der Schwarzschildradius ist.