Allgemeine Relativitätstheorie

9. Übungsblatt — Abgabe: 6.7.2004

H27 *Schwarzschildmetrik* **[3+1 Punkte]**

Gegeben sei die Schwarzschildmetrik

$$g = h\,\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - h^{-1}\,\mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r - r^2(\mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi) \tag{1}$$

mit $h = 1 - \frac{r_0}{r}$ und $r > r_0$.

a) Wie lauten die nichtverschwindenden Christoffelsymbole für diese Metrik? Geben Sie außerdem die Skalarkrümmung R an.

b) Zeigen Sie, dass Geodäten, welche bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ mit $\dot{\vartheta} = 0$ starten, entlang der $\vartheta = \frac{\pi}{2}$-Koordinatenlinie verlaufen.

H28 *Gravitation und skalare Materie in vier Dimensionen* **[1+3+4 Punkte]**

Gegeben sei die Einstein-Hilbert Wirkung

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int \mathrm{dVol}\ R \tag{2}$$

und ein Skalarfeld ϕ, das mittels

$$S_M = \frac{1}{2}\int \mathrm{dVol}\ \left(g^{ij}\nabla_i\phi\nabla_j\phi - m^2\phi^2\right) \tag{3}$$

minimal an die Gravitation gekoppelt ist.

a) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen für ϕ.

b) Berechnen Sie den Energie-Impuls-Tensor, und verifizieren Sie, dass dieser kovariant konstant ist, d.h. es gilt $\nabla^i T_{ij} = 0$.

c) Sei nun ϕ masselos, d.h. setzen Sie $m = 0$, und zerlegen Sie ϕ in

$$\phi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{lm}\phi_{lm} \quad \text{mit} \quad \phi_{lm} = \frac{1}{r} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\,\psi_l(r,t)\ , \tag{4}$$

wobei Y_{lm} die Kugelflächenfunktionen und f_{lm} konstante Faktoren sind. Zeigen Sie, dass sich in der Schwarzschildgeometrie für $\psi_l(r,t)$ die folgenden Bewegungsgleichung ergibt:

$$\partial_t^2\psi_l - h(r)\partial_r(h(r)\partial_r\psi_l) - V_l\psi_l = 0 \quad \text{mit} \quad V_l = h(r)\left(\frac{r_0}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\ . \tag{5}$$
