Allgemeine Relativitätstheorie

6. Übungsblatt Abgabe: 8.6.2004

H18 *Parametrisierte Geodätische* **[3 Punkte]**

Zeigen Sie: Ist eine Geodätische (oder auch *Geodäte*) auf einen beliebigen Parameter σ bezogen, so gilt für ihre lokale Koordinatendarstellung $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^n$

$$\tilde{c}(\sigma) = (u^1(\sigma), ..., u^n(\sigma)) \tag{1}$$

die Gleichung

$$\ddot{u}^k + \Gamma^k{}_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j = \lambda \dot{u}^k \tag{2}$$

mit einer differenzierbaren Funktion $\lambda = \lambda(\sigma)$. (Wie gewöhnlich bedeutet der Punkt eine Ableitung nach dem Parameter.) Erfüllt umgekehrt eine Kurve obige Gleichung, so ist sie (nach einer Umparametrisierung) eine Geodätische.

H19 *Geodätische in der Poincaré-Halbebene* **[2+2 Punkte]**

Sei H die Poincaré-Halbebene aus Aufgabe H15.

a) Bestimmen Sie die Graphen sämtlicher Geodätischen des Levi-Civita-Zusammenhangs.

b) Welche Länge besitzen diese Geodätische?

H20 *Schwarzschild-Halbebene* **[1+1+1+2 Punkte]**

Gegeben seien ein $r_0 \in \mathbb{R}^+$ sowie die Halbebene $E := \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > r_0\}$. Sei weiter eine Funktion $h : E \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(t, r) := 1 - \frac{r_0}{r} \,. \tag{3}$$

Die Halbebene E zusammen mit der semi-Riemannschen Metrik

$$g = h \, \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t - \frac{1}{h} \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r \tag{4}$$

heißt *Schwarzschild-Halbebene.*

a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $(t, r) \mapsto (\pm t + b, r)$ mit $b \in \mathbb{R}$ Isometrien sind.

b) Berechnen Sie die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs.

c) Zeigen Sie, dass die r-Koordinatenlinien Geodätischen sind (bei geeigneter Parametrisierung).

d) Bestimmen Sie alle Nullgeodätischen c mit $c(r) = (t(r), r)$, indem Sie die Funktionen $t = t(r)$ bestimmen. Überlegen Sie sich den Verlauf dieser Nullgeodätischen in E.
