Allgemeine Relativitätstheorie

5. Übungsblatt Abgabe: 25.5.2004

H15 *Poincaré-Halbebene* **[1+1+2 Punkte]**

Die Poincaré-Halbebene H ist definiert als die obere Halbebene des $\mathbb{R}^2$, also $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$, mit einer Metrik g gegeben durch

$$(g_{ij}) = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs auf H.

b) Zeigen Sie, dass die Winkelmessung auf H mit der euklidischen Winkelmessung übereinstimmt. (Hinweis: $\cos \measuredangle(X_p, Y_p) = \frac{g_p(X_p,Y_p)}{\sqrt{g_p(X_p,X_p)}\sqrt{g_p(Y_p,Y_p)}}$.)

c) Sei $Y_0 = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_{(0,1)}$ der Tangentenvektor in y-Richtung. Sei $Y(t)$ die Parallelverschiebung von Y_0 längs der Kurve $c(t) = (t,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $Y(t)$ mit $\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{c(t)}$ den Winkel t einschließt. (Hinweis: Sei $v(t) = (a(t), b(t))$ ein Vektorfeld, welches die Gleichung des Paralleltransports entlang $c(t)$ erfüllt. Diese reduziert sich dann auf

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \Gamma^1{}_{12} b &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} + \Gamma^2{}_{11} a &= 0 \, . \end{aligned} \tag{2}$$

Wählen Sie nun geeignete a und b, die (2) erfüllen.)

H16 *Immersion und Levi-Civita-Zusammenhang* **[3 Punkte]**

Seien (M,g) und $(\bar{M},\bar{g})$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit den Levi-Civita-Zusammenhängen ∇ und $\bar{\nabla}$. Sei außerdem eine Inklusionsabbildung $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ gegeben, die eine isometrische Immersion ist, d.h. $i^*\bar{g} = g$.

Eine Abbildung $\tilde{\nabla} : X(M) \times X(M) \to X(M)$ sei gegeben durch

$$\tilde{\nabla}_X Y\Big|_p := \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}\Big|^T_{i(p)} , \tag{3}$$

wobei $(\cdot)^T$ den Tangentialanteil in Richtung von M bezeichnet und $X, Y \in X(M)$ sowie $\bar{X}, \bar{Y} \in X(\bar{M})$. Letztere heißen *Erweiterungsvektorfelder* von X und Y und erfüllen die Gleichungen

$$\bar{X}\big|_{i(U)\cap V} = X\big|_{i(U)\cap V} \tag{4}$$

$$\bar{Y}\big|_{i(U)\cap V} = Y\big|_{i(U)\cap V} \tag{5}$$

für alle offenen Mengen U und V mit $p \in U \subset M$ und $i(p) \in V \subset \bar{M}$.

Zeigen Sie, dass dann $\nabla = \tilde{\nabla}$ gilt.

(Hinweis: Zeigen Sie: a) $\tilde{\nabla}$ ist ein affiner Zusammenhang, b) $\tilde{\nabla}$ ist torsionsfrei und c) $\tilde{\nabla}$ ist metrisch kompatibel. Dann folgt mit Satz II.6 aus der Vorlesung die Behauptung.)

H17 *Killing-Vektoren* **[3+2 Punkte]**

Im folgenden schauen wir uns infinitesimale Symmetrien der Metrik $g = (g_{ij})$ einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit an. Sei also $(U, \mathbf{x})$ eine Karte um $p \in M$ und $u^i \mapsto u^i + \delta u^i$ eine infinitesimale Bewegung mit

$$\delta u^i = \xi^i \delta\lambda \tag{6}$$

Dann gilt $\delta g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^n} \xi^n \, \delta\lambda$ (warum?) und $\delta \, \mathrm{d}u^i = \mathrm{d} \, \delta u^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial u^n} \, \mathrm{d}u^n \, \delta\lambda$. Daher ist

$$\delta g = \delta(g_{ij} \, \mathrm{d}u^i \otimes \mathrm{d}u^j) \tag{7}$$

$$= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^n} \xi^n + g_{nj} \frac{\partial \xi^n}{\partial u^i} + g_{in} \frac{\partial \xi^n}{\partial u^j} \right) \delta\lambda \, \mathrm{d}u^i \otimes \mathrm{d}u^j . \tag{8}$$

Nun sei $\delta g = 0$ (infinitesimale Symmetrie). Hieraus folgt

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^n} \xi^n + g_{nj} \frac{\partial \xi^n}{\partial u^i} + g_{in} \frac{\partial \xi^n}{\partial u^j} = 0 , \tag{9}$$

und dies ist (zeigen!) äquivalent zu

$$g_{mk} \nabla_i \xi^m + g_{mi} \nabla_k \xi^m = 0 \tag{10}$$

mit $\nabla_k \xi^m := \partial_k \xi^m + \Gamma^m{}_{kl} \xi^l$. Die Lösungen zu (10) heißen *Killing-Vektoren.*

a) Bestimmen Sie die Killing-Vektoren der 2-Sphäre S^2 mit

$$g = \mathrm{d}\vartheta \otimes \mathrm{d}\vartheta + \sin^2 \vartheta \, \mathrm{d}\varphi \otimes \mathrm{d}\varphi , \tag{11}$$

d.h. lösen sie (10).

b) Unter a) erhalten Sie eine Lösung der Form

$$X = \xi^\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \xi^\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} . \tag{12}$$

Schreiben Sie diese nun um als

$$X = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i L_i , \tag{13}$$

wobei die L_is Linearkombinationen der Basisvektoren $\{\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ sind. Treffen Sie Ihre Wahl der L_i so, dass gilt:

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} L_k . \tag{14}$$

(Hinweis: Wenden Sie die L_is auf ein beliebiges $f \in \mathcal{F}(S^2)$ an, und erinnern Sie sich an das, was Sie über die Lie-Klammer gelernt haben.)

Bemerkung: (14) ist die Lie-Algebra der Generatoren für Rotationen im $\mathbb{R}^3$, d.h. der Generatoren der $\mathsf{SO}(3)$.