Allgemeine Relativitätstheorie

4. Übungsblatt — Abgabe: 18.5.2004

H12 *(Semi-)Riemannsche Produktmannigfaltigkeiten* **[1+1 Punkte]**

Seien (M, g_M) und (N, g_N) zwei (semi-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten, und sei außerdem $M \times N$ ihre Produktmannigfaltigkeit.

a) Zeigen Sie, dass sich der Tangentialraum der Produktmannigfaltigkeit aus der direkten Summe der Tangentialräume von M und N ergibt:

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \oplus T_q N. \tag{1}$$

Betrachten Sie hierzu die Abbildung $X \to (\pi_{1*}(X), \pi_{2*}(X))$ an einer Stelle (p, q) mit $X \in T_{(p,q)}(M \times N)$, wobei $\pi_1 : M \times N \to M$ und $\pi_2 : M \times N \to N$ die kanonischen Projektionen sind.

b) Zeigen Sie, dass durch

$$h := \pi_1^* g_M + \pi_2^* g_N \tag{2}$$

eine (semi-)Riemannsche Metrik auf $M \times N$ gegeben ist, die sogenannte *Produktmetrik*.

H13 *Induzierte Metriken und Zusammenhänge* **[2+2 Punkte]**

Gegeben seien die Immersionen

$$\begin{aligned} \Phi_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{(Clifford-Torus)} \\ &(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{(Standard-Torus)} \\ &(u, v) \mapsto ((R + r \sin u) \cos v, (R + r \sin u) \sin v, r \cos u)\ , \quad 0 < r < R\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Berechnen Sie die durch Φ_1 und Φ_2 induzierten Riemannschen Metriken. Berechnen Sie die Christoffelsymbole der Levi-Civita Zusammenhänge.

H14 *Affiner Zusammenhang* **[2+2+2 Punkte]**

Zeigen Sie für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M:

a) Die Differenz zweier affiner Zusammenhänge auf M ist ein Tensorfeld, d.h. die Differenz ist $\mathcal{F}(M)$-linear in beiden Argumenten. Insbesondere ist die Differenz zweier torsionsfreier affiner Zusammenhänge ein symmetrisches Tensorfeld.

b) Sei umgekehrt $A : X(M) \times X(M) \to X(M)$ in beiden Argumenten $\mathcal{F}(M)$-linear und ∇ ein affiner Zusammenhang auf M, so ist auch $\nabla + A$ ein affiner Zusammenhang auf M. Ist A außerdem symmetrisch, so haben ∇ und $\nabla + A$ den gleichen Torsionstensor.

c) Jeder affine Zusammenhang ∇ kann eindeutig als Summe eines torsionsfreien affinen Zusammenhangs $\bar{\nabla}$ und eines schiefsymmetrischen Tensorfeldes $\tilde{T}$ geschrieben werden, wobei $\tilde{T} = \frac{1}{2} T$, wenn T der Torsionstensor von ∇ ist.