Allgemeine Relativitätstheorie

3. Übungsblatt — Abgabe: 11.5.2004

H08 *S^1 als reeller projektiver Raum* **[2 Punkte]**

Zeigen Sie, dass der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^1$ und die Sphäre S^1 zueinander diffeomorph sind.

H09 *Veronese Fläche* **[1+2+2 Punkte]**

Sei ϕ eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ gegeben durch

$$x = (x^1, x^2, x^3) \mapsto \Big((x^1)^2, (x^2)^2, (x^3)^2, \sqrt{2}\,x^1x^2, \sqrt{2}\,x^1x^3, \sqrt{2}\,x^2x^3\Big) \tag{1}$$

und S^n die n-Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung Φ sei die Einschränkung der Abbildung ϕ auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Phi := \phi|_{S^2} : S^2 \to \mathbb{R}^6\ . \tag{2}$$

Zeigen Sie:

a) $\Phi(S^2)$ liegt in der 5-Sphäre: $\Phi(S^2) \subset S^5$.

b) $\Phi : S^2 \to S^5$ ist differenzierbar (differenzierbare Strukturen seien jeweils durch die stereographischen Projektionen gegeben).

c) Φ induziert eine injektive differenzierbare Abbildung $\mathbb{R}P^2 \to S^5$.

H10 *Fortsetzung von Vektorfeldern* **[2 Punkte]**

Gegeben seien die offen Teilüberdeckungen der 2-Sphäre $U_+ = S^2\backslash\{S\}$ und $U_- = S^2\backslash\{N\}$ mit den zugehörigen stereographischen Projektionen $\pi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^2$ und $\pi_- : U_- \to \mathbb{R}^2$. Auf U_+ sei außerdem ein Vektorfeld X_+ definiert durch

$$X_+ = (-u_+^1 - u_+^2) \circ \pi_+ \frac{\partial^{(\mathbf{x})}}{\partial u_+^1} + (u_+^1 - u_+^2) \circ \pi_+ \frac{\partial^{(\mathbf{x})}}{\partial u_+^2}\ . \tag{3}$$

Wie muss ein Vektorfeld X_- auf U_- definiert werden, so dass ein differenzierbares Vektorfeld X als Fortsetzung von X_+ auf ganz $S^2 = U_+ \cup U_-$ entsteht?

H11 *zu differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* **[1+2 Punkte]**

a) Bisher haben wir Mannigfaltigkeiten oft durch Nullstellengebilde definiert: $M = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) = 0\}$. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion f, deren Nullstellenmenge keine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. (Was geht schief?)

b) Wir haben gesehen, dass der "2-Kegel" $K^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$ keine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Definieren Sie eine neue, "deformierte" Mannigfaltigkeit K^2_{def} über eine Teilmenge ("Fläche") im $\mathbb{R}^3$ derart, dass sie diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist, ohne K^2 oder dessen Spiegelung an der x-y-Ebene zu schneiden.
