Allgemeine Relativitätstheorie

2. Übungsblatt — Abgabe: 4.5.2004

H04 *Reeller projektiver Raum* **[1+3 Punkte]**

Der *reelle projektive Raum* $\mathbb{R}P^n$ ist der Raum aller eindimensionalen Untervektorräume ("Geraden durch den Ursprung") des $\mathbb{R}^{n+1}$. Diesen Raum kann man folgendermaßen definieren: Sei $(x^1, ..., x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Tupel mit der Äquivalenzrelation

$$(x^1, ..., x^{n+1}) \sim (\lambda x^1, ..., \lambda x^{n+1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*. \tag{1}$$

Der reelle projektive Raum ist die Menge aller Äquivalenzklassen unter dieser Relation auf $\mathbb{R}^{n+1}$: $\mathbb{R}P^n = \{[x^1, ..., x^{n+1}] \mid x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}\}$. Man schreibt auch kurz

$$\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/(x \sim \lambda x) \tag{2}$$

und nennt solche Räume *Quotientenräume*. Zeigen Sie, dass (1) eine Äquivalenzrelation und (2) eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

H05 *Clifford Torus* **[2 Punkte]**

Gegeben sei die Sphäre $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| = 1\}$ sowie die Abbildung

$$\Phi : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4 : \; (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y). \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass Φ eine *differenzierbare* Abbildung $S^1 \times S^1 \to S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ist.

H06 *Differenzierbare Vektorfelder* **[4 Punkte]**

Sei M eine Mannigfaltigkeit, TM das zugehörige Tangentialbündel mit der Projektion $\pi : TM \to M$ und $\mathcal{F}(M)$ die Menge (oder der Ring) der C^∞-Funktionen auf M. Ein Schnitt von TM, d.h. eine Abbildung $X : M \to TM$ mit $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, heißt *Vektorfeld*. Betrachten wir nun die Mannigfaltigkeit *lokal*, sei also $(U, \mathbf{x})$ eine Karte und $p \in U \subset M$ ein beliebiger Punkt. Ein Vektorfeld lässt sich für alle p durch Funktionen $\xi^i : M \to \mathbb{R}$ schreiben als

$$X_p = \sum_i \xi^i(p) \left.\frac{\partial^{(\mathbf{x})}}{\partial u^i}\right|_p . \tag{4}$$

Dies ist gerechtfertigt aufgrund der Wirkung von Vektorfeldern auf Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$, die definiert ist als $X : (Xf)(p) := X_p(f)$.

Ein Vektorfeld heißt *differenzierbar*, wenn die Abbildung $X : M \to TM$ differenzierbar ist. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) X ist ein differenzierbares Vektorfeld.

(ii) Für alle $f \in \mathcal{F}(M)$ ist $Xf \in \mathcal{F}(M)$.

(iii) Auf allen Karten $(U, \mathbf{x})$ sind die Funktionen ξ^i differenzierbar.

H07 *Stetigkeit für Abbildungen zwischen topologischen Räumen* **[2 Punkte]**

Ein *topologischer Raum* ist ein Tupel (M, T), bestehend aus einer Menge M und einer *Topologie* T, d.h. T ist die Familie von Untermengen von M, die wir offen nennen wollen: U offen $\Leftrightarrow U \in T$. Bedingungen an T sind

(T1) $M \in T$ und $\varnothing \in T$.

(T2) Der Schnitt endlich vieler Mengen aus T liegt in T.

(T3) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus T liegt in T.

Seien (M, T_M) sowie (N, T_N) topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : M \to N$ *stetig*, falls das Urbild offener Mengen offen ist:

$$\forall\, U \in T_N : \; f^{-1}(U) \in T_M \tag{5}$$

Wählen Sie $M = \mathbb{R}^m$ und $N = \mathbb{R}^n$, beide ausgestattet mit der Standardtopologie, und zeigen Sie, dass diese Definition der Stetigkeit mit der Standarddefinition übereinstimmt:

$$(\forall\, x \in M)(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0) : (\forall\, y \in M) : ||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \varepsilon, \tag{6}$$

wobei $f : M \to N$.