Allgemeine Relativitätstheorie

1. Übungsblatt — Abgabe: 26.4.2004

H01 *Index-Notation* **[1+1 Punkte]**

Seien A, B $n \times n$-Matrizen und x, y Elemente aus einem n-dimensionalen reellen metrischen Vektorraum.

a) Schreiben Sie folgende Ausdrücke in Index-Notation um: $Ax = y$, $x \cdot y = 0$, $AA^T = \mathbb{1}$, $x^T B x = 0$, $\operatorname{tr}(xx^T) = x^T x$.

b) Beweisen Sie in Index-Notation die Zyklizität der Spur: $\operatorname{tr}(AB\cdots CD) = \operatorname{tr}(DAB\cdots C)$, sowie $A^T = A^{-1}$ für orthogonale Matrizen (die Spalten bilden eine Orthonormalsystem).

H02 *Pauli-Matrizen und Lorentz-Transformationen* **[2+2+2 Punkte]**

Ein Punkt im Minkowski-Raum sei bezeichnet durch $x = (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, die Metrik sei $\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Außerdem seien die Pauli-Matrizen σ_μ gegeben durch

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Betrachten Sie das Produkt $X(x) = x^\mu \sigma_\mu$. Bestimmen sie unter Verwendung der Determinante und der Spur einfache Ausdrücke für die inverse Transformation $x(X)$ sowie für die Norm des Vektors x: $\sqrt{x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu}}$.

Eine *Isometrie* ist eine bijektive Abbildung von einem metrischen Raum in einen anderen, die Längen erhält. *Lorentz-Transformationen* sind Isometrien auf dem Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,3}$.

b) Geben Sie die Wirkung von Lorentz-Transformationen auf die X an. (Tipp: Erinnern Sie sich an gewöhnliche Basistransformationen, kurze Rechnung!)

c) Betrachten Sie eine Ähnlichkeitstransformation von X mit der Matrix $A = \exp(-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}))$. Was geschieht mit x? Was gilt bei $\theta = 2\pi$ und $\theta = 4\pi$? (Woran erinnert Sie dies?)

H03 *Orthogonales Komplement* **[1+1+2 Punkte]**

Sei V ein Vektorraum mit Metrik g und W ein Untervektorraum von V. Das *orthogonale Komplement* ist definiert als $W^\perp := \{x \in V | g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0 \text{ für alle } y \in W\}$.

a) Zeigen Sie, dass $W \oplus W^\perp = V$ und $(W^\perp)^\perp = W$ unter der Annahme, dass $g|_W$ nicht entartet ist.

Sei V nun ausgestattet mit der Lorentz-Metrik η und x und y zeitartige Vektoren.

b) Zeigen Sie, dass der Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,3}$ gleich dem Raum $\operatorname{span}\{x\} \oplus (\operatorname{span}\{x\})^\perp$ ist.

c) Unter welchen Umständen ist das Skalarprodukt $\eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ negativ? Wann gilt die Dreiecksungleichung $||x + y|| \geq ||x|| + ||y||$?
