Christian Sämann

Ästhetik und Mathematik
Ein Versuch, Schönheit zu finden.

April 2000

"Schönes gibt es überhaupt nicht in der Wissenschaft"
(Martin Heidegger)

"Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics"
(Godfrey H. Hardy)

1. Einleitung

Schon aus den beiden vorangestellten Zitaten läßt sich erahnen, welch unterschiedliche Antworten man erhalten wird, wenn man nach Schönheit in der Mathematik fragt. Da gibt es auf der einen Seite eine Zahl von Geisteswissenschaftlern, die den trockenen Theoretikern der Wissenschaften (und allen voran natürlich den suspektesten: den Mathematikern) keinen Sinn für das Lebendige und Schöne zubilligen möchten. Auf der anderen Seite findet man einen unglaublich umfassenden und geradezu rührenden Zitatenschatz von Wissenschaftlern (und eben besonders auch von Mathematikern stammend), bei dessen Studium man den Eindruck gewinnt, mehr Künstler als Wissenschaftler sprechen zu hören. Während die eine Seite verständnislos einer Welt gegenübersteht, in der die unerbittlichen Gesetze der Logik das Geschehen bestimmen (und so dem Geschmack kein Raum mehr bleibt), so lernt man andererseits fast schon religiös anmutende Äußerungen der Begeisterung über die Mathematik und ihre Fülle an Schönheit kennen.

In der jüngeren Literatur zu diesem Thema fallen besonders zwei Bücher auf: Das schon zu einer größeren Popularität an mathematischen Instituten gelangte "Proofs from The Book" von Martin Aigner und Günter M. Ziegler sowie "Das Schöne und das Biest" von Ernst Peter Fischer.

Das erste Buch basiert auf einer Äußerung des ungarischen Mathematikers Paul Erdös, der einmal sinngemäß sagte: "Es gibt ein Buch ("The Book"), in dem alle mathematischen Beweise in einer vollkommenen Form verzeichnet sind, und dieses Buch ist bei Gott. Als Mathematiker ist es unnötig, an die Existenz Gottes zu glauben, unbedingt aber muß man an das Buch glauben." In "Proofs from The Book" stellen die Autoren nun Beweise vor, die sie für so "vollkommen" halten, daß man sie wohl auch in Erdös's "Book" finden würde. Auch wenn die Autoren im Vorwort zugeben, keine klare Definition oder Vorstellung davon zu haben, was für sie ein schöner bzw. vollkommener Beweis ist, so geben sie doch einige Beispiele. Ausschlaggebend für die Aufnahme von Beweisen in ihr Buch waren "brilliante Ideen, clevere Verbindungen [von unterschiedlichen mathematischen Teilgebieten] sowie wundervolle Einblicke [die Beweise in mathematische Teilgebiete erlauben]". Was aber bei allen Seminaren zu diesem Buch auffällt, ist, daß überraschend wenig darüber gesprochen wird, was ein schöner Beweis ist und ob es "schöne" Mathematik gibt.

Schon der Titel "Das Schöne und das Biest" ist eine Anspielung auf den scheinbar unüberbrückbaren Gegensatz zwischen dem Ästhetischen und "dem Biest", einer Naturwissenschaft, die sich dem Verständnis verweigert und bei nicht wenigen die Freude an der Schule deutlich mindert. Fischer, selbst Physiker und Biologe, versucht zu zeigen, daß dieser Gegensatz nur scheinbar besteht, und auf eine Abkehr der Wissenschaft von ästhetischen Werten fußt. Das Buch ist ein Plädoyer für die Rückkehr zu eben diesen Werten, die die Kriterien der Wahrheit nicht ersetzen, sondern ergänzen sollen. Dies bringe zunächst einmal einen rascheren Fortschritt der Wissenschaften, denn große Physiker wie z.B. Einstein fanden ihre Theorien oft, indem sie sich von ihrem wissenschaftlich-ästhetischen Gespür leiten ließen. Außerdem würde eine ästhetische Betrachtung auch die Ergebnisse und Anwendungen der Forschung umfassen, und "häßliche Ergbenisse", wie z.B. die Atombombe, würden deutlich kritischer gesehen. Auch Fischer bringt in seinem Buch keine Definition des Schönen; er hält sie nicht nur für unnötig, sondern eine diffuse Vorstellung sogar für produktiver.

Daß eine Verbindung Ästhetik und Naturwissenschaft gerechtfertigt, ja sogar wünschenswert und notwendig für ist, zeigen zahllosen Äußerungen großer Wissenschaftler. Stellvertretend für viele sei hier der französische Mathematiker Henri Poincaré (1854-1912) zitiert, der einmal sagte: "*Der Gelehrte studiert die Natur nicht, weil das etwas Nützliches ist; er studiert sie, weil er daran Freude hat, und* *er hat Freude daran, weil sie so schön ist. Wenn die Natur nicht so schön wäre, so wäre es nicht der Mühe wert, sie kennenzulernen.*"

Will man nun die Verbindung Schönheit und Mathematik auf ihren Gehalt hin untersuchen, so gibt es drei Fragen zu beantworten:

- Was ist "Schönheit", was sagt die Philosophie bzw. der Teilbereich Ästhetik dazu?
- Mit was befaßt sich die Mathematik?
- Und schließlich: Gibt es "Schönheit" in der Mathematik?

2. Ästhetik

Natürlich kann hier nur ganz knapp auf die historische Entwicklung der Ästhetik und der ihr zugrunde liegenden philosophischen Gedanken eingegangen werden. Trotzdem läßt sich eine große Gemeinsamkeit der Modelle erkennen, die am Schluß hervorgehoben wird.

Die philosophische Ästhetik ist die Disziplin, die sich mit reflektierten Sinneswahrnehmungen und auf Gefühl beruhender Erfahrung beschäftigt. Besonders befaßt sie sich mit Eindrücken durch Kunst und Natur wie dem Schönen und dem Erhabenen.

Es existiert eine Verbindung der Ästhetik zur Erkenntnistheorie (und damit zur Mathematik), die hier nur kurz skizziert werden soll. Bei der Beobachtung der Natur mit unseren Sinnen stellt sich natürlich die Frage nach der Objektivität der Beobachtung (auf der dann ja die wissenschaftlichen Modelle fußen), hier könnte die Ästhetik weiterhelfen. Der Schritt von der Erkenntnistheorie zur Mathematik ist dann wiederum relativ klein, ist die Mathematik mit ihrer Logik doch grundlegend und in ihrer Methodologie beispielhaft für wissenschaftliches Erkenntnisvermögen. Diese Verbindung besitzt natürlich für unsere Fragestellung keinen Wert, und sei nur der Vollständigkeit halber angeführt.

Beginnt man in der griechischen Antike, so stößt man auf die "mimesis"-Theorie zur Kunst. Nach Platons Ideenlehre sind alle "wirklichen", vom Menschen wahrgenommene Objekte nur Schatten einer Idee bzw. eines Archetyps dieses Objektes. Der Künstler sollte versuchen, diese Idee selbst darzustellen; kopiert er nur die sichtbaren Erscheinung, so kopiert er einen Schatten, wodurch der Wert der ursprünglichen Idee bis zur Darstellung zweimal gemindert wurde. Platon selbst betont die Einheit des Schönen und des Guten, Aristoteles erweitert dies zur Trinität des Guten, Wahren und Schönen. In Platons "Phaidros" findet man: "[Das Schöne ist] *das Liebreizendste und Hervorleuchtendste, sein Anblick erinnert die Seele an die göttliche Sphäre, in der sie vor ihrer irdischen Existenz sein reines Urbild schaute.*" Schon hier erkennt man den neben der Verknüpfung mit der Wahrheit immer wieder im Schönen gesehenen Hinweis auf eine höhere, göttliche Sphäre. (Es ist auch kein Zufall, das Erdös' "Book" sich bei Gott befinden soll.)

Der Neuplatoniker Plotin gibt diese mystische Dimension des Schönen sehr klar wieder mit dem Ausspruch "*Schönheit ist das Durchleuchten des ewigen Glanzes des 'Einen' durch die materielle Erscheinung.*" Diese Auffassung wurde gegen Ende des 17. Jahrhunderts noch erweitert durch Shaftesbury, der innerhalb der teleologischen Harmonie des Kosmos, d.h. der auf ein höheres (göttliches) Endziel ausgerichteten Zweckmäßigkeit des Kosmos, das Schöne und das Gute als identisch betrachtet. Die Verknüpfung von Schönheit mit Harmonie und Sinn-Fülle des Kosmos, die beide wiederum auf ein höheres Wesen hinweisen, ist hier durchaus nicht selten.

Der Begriff der Ästhetik selbst ist noch relativ jung, er wurde 1750 von A.G. Baumgarten, dem Begründer dieser Disziplin, in seinem Werk Aesthetica geprägt. Er betrachtet sie als die Lehre vom Schönen und der Kunst und sieht die Ästhetik als eine besondere menschliche Einstellung zur Wirklichkeit. Die Schönheit sei in Analogie zum rationalen Optimum des Verstandes zu sehen, damit war Vollkommenheit natürlich ein Charakteristikum der Schönheit.

Die französischen Theorien bis zu dieser Zeit orientierten sich hauptsächlich an der antiken mimesis-Lehre. So sah Batteux die Kunst als selektive Nachahmung der Natur. Schönheit wurde hauptsächlich unter dem cartesianischen Primat der Ratio gesehen. Als beispielhaft für diese Auffassung dürfen wohl Leonardo da Vincis technische und anatomische Studien gelten.

John Locke verband mit der Schönheit die Tugend, der Geschmack galt als Wegweiser für ein moralisches Handeln, was sich natürlich schon weitgehend in Platons Verbindung des Guten und Schönen fand.

Bereits hier gab es eine bewußt geäußerte Begeisterung der Wissenschaftler für die Schönheit der Natur. Stellvertretend soll hier ein Zitat von Leibniz stehen, das sehr an das in der Einleitung stehende von Poincaré erinnert: "*Die Schönheit der Natur ist so groß und deren Betrachtung hat eine solche Süßigkeit, daß wer sie gekostet, alle anderen Ergötzlichkeiten gering dagegen achtet.*" Die Aufklärung mit ihren Bestrebungen, das Verstandesurteil an die Stelle religiöser Dogmen und Aberglaube zu setzen, belebte die Diskussion um die Ästhetik erneut. Es ging jetzt allerdings um die Bestimmung der Grenzen menschlicher Vernunft und damit um die Frage nach der Bedeutung der Sinnnlichkeit als Element, Komplement und Widerpart des menschlichen Verstandes.

Das 18. Jahrhundert sah den Geschmack als ein Vermögen zur wohlunterschiedenen Wahrnehmung mit einem verfeinerten Empfinden. Das Gefallen bzw. Mißfallen wurde als eine freie und spontane Äußerung des Subjekts nach Reflexion des Erfahrenen in seinem geistigen und kulturellen Zustand betrachtet. Jeder Mensch habe eine natürliche Anlage zum Geschmack, diese müsse aber durch Erfahrung und Übung weiterentwickelt werden. Die Ästhetik befaßte sich nun neben den Künsten, der schönen Natur auch zunehmend mit Moral, Charakter und Sitten.

Kant betrachtete die Kunst als von der Natur autonom. Auch er hielt den Geschmack für eine ästhetisch reflektierte Urteilskraft, die im Zusammenspiel mit dem Verstand menschliche Bewertungen vervollkommnen kann. Die Lust am Schönen allerdings sei ein interesseloses Wohlgefallen, das durch das freie Wechselspiel des sinnlichen und des rationalen Erkenntnisvermögens erzeugt werde. Das Erleben des Schönen hingegen sieht er wieder mehr ganzheitlich: Es sei das Bewußtwerden des harmonischen Einfügens in eine teleologische Natur, deren Schönheit ein metaphysisches Indiz für ihre zweckmäßige Verfassung sei. Das Schöne lasse Freiheit erfahren und bestätige den Menschen als vernünftiges Wesen. Den Begriff des Erhabenen beschreibt er als eine Rührung, ein Versagen aller Erkenntnis. Das wirklich Erhabene sei ausschließlich der Natur vorbehalten.

Auch Hume sah wieder den harmonischen Aspekt des Schönen. Das Erleben von Schönheit sei die Freude am Zusammenhang und an der Ordnung (eine Definition, die sich direkt in die Mathematik übertragen ließe).

Wie aber konnte nun Kant das Ästhetische eng mit dem harmonischen Kosmos verknüpfen und gleichzeitig für ihn die Kunst unabhängig von der Natur sein? Diesen vordergründigen Widerspruch löst nicht zuletzt Schelling auf, indem er die Auffassung vertrat, der Künstler arbeite nicht nach der Natur, sondern wie die Natur. Dieser Gedanke, daß der Künstler nicht Objekte der Natur kopieren, sondern die Schöpfungsmechanismen ermitteln und analog zu diesen arbeiten solle, findet sich unter anderem in der jüngeren Kunst. Paul Klee befand, die Aufgabe autonomer Kunst liege im “*Aufspüren der formenden Kräfte der Natur, den Gesetzen nach denen die Natur funktioniert*”. Kadinsky wollte die Anstöße für seine künstlerische Arbeit nicht von einem Teil der Natur erhalten, sondern von der Natur als Ganzem. Und schließlich ging es Picasso darum, “*nicht die Natur auszudrücken, sondern wie die Natur zu arbeiten*”.

Hegel wiederum war einer der wenigen, der das Naturschöne als minderwertig betrachtete. Er sah in der Kunst eine Manifestation des Göttlichen, es ging ihm um eine Darstellung des Absoluten. (Seine Auffassung, dies sei in der Natur nicht erfahrbar, sondern nur in der ausschließlich im menschlichen Geist gereiften Kunst, ist wohl ähnlich oberflächlich, wie z.B. sein Urteil, China vollziehe keine eigenständige historische Entwicklung.)

In der folgenden Zeit entstand dann ein gewisses Mißtrauen gegenüber der Ästhetik. So kritisierte Kierkegaard ihre Anhänger als hedonistisch und unmoralisch. Auch die Kunst selbst vollzog immer mehr eine Intellektualisierung und vermied das herkömmliche Schöne, um “Neues” hervorzubringen. Schließlich sind Äußerungen wie die B. Newmans: “*Die Triebkraft der modernen Kunst war das Verlangen, das Schöne zu zerstören*” durchaus nachvollziehbar.

In den 90er Jahren des letzten Jahrhunderts ließen sich aber einige Tendenzen zur Rückbesinnung der Kunst auf das Ideal Schönheit erkennen (so z.B. die Ausstellung “Beauty now!” in München)

Überraschenderweise lassen sich in den Äußerungen zum Schönen einige Punkte großer Gemeinsamkeit erkennen, die im weiteren helfen sollen, das Schöne faßbarer zu machen.

Die *Natur* dient als das große Vorbild des Schönen und Erhabenen. Sie wird meist teleologisch und sinnerfüllt gesehen, und schön ist, was sich in ihre Harmonie problemlos einfügt. Diese Harmonie und Zweckmäßigkeit wird oft als Hinweis auf etwas den Menschen Vervollkommnendes und Göttliches gesehen, wodurch das Erfahren des Schönen das menschliche Bedürfnis nach Ergänzung und Transzendierung erfüllt. Schön ist nicht nur, was in der Natur vorkommt, sondern alles, was nach ihren Regeln durch Künstler hervorgebracht wird.

Die *Kunst* imitiert oftmals die Natur (im weitesten Sinn), und zwar entweder konkret, in Variation oder in ihren Schöpfungsmechanismen, so daß die Kunst sich zwar von den konkreten Gegenständen der Natur befreien kann, immer aber im Rahmen ihrer Gesetze bleiben muß. (Dies gilt aber ohnehin für alle menschlichen Aktivitäten.)

Der *Geschmack* ist ein reflektiertes und geübtes Sinnesurteil, das dem Verstand als Partner zur Seite stehen kann.

Das *Erhabene* wird beim Erfahren von Gegenständen gespürt, die durch Größe, Kraft und Vollkommenheit dem Menschen seine Möglichkeiten und Grenzen vor Augen führen. Seine Wirkung ist ähnlich zum harmonisch-Schönen ein Hinweis auf Göttlichkeit. Daraus resultieren Faszination, Ergriffenheit und Überwältigung.

Das *Schöne* ist das "Gute" und "Wahre" (was sich eben harmonisch mit dem teleologischen Kosmos verträgt). Es findet sich immer in einer reizvollen (nicht zu trivialen) Abbildung der Natur, besonders deutlich tritt es im Vollkommenen, Erhabenen und Absoluten hervor. Es muß aber für den Geschmack zumindest teilweise erfaßbar sein, damit dessen Wechselspiel mit dem Verstand überhaupt möglich ist.

3. Mathematik

Auch die Mathematik kann nur ähnlich oberflächlich wie die Ästhetik behandelt werden. Es soll auch lediglich ein philosophisches Modell vorgeschlagen werden, daß die Mathematik in den Bereich der Naturwissenschaften rückt, während sie sonst mehr als Geisteswissenschaft betrachtet wird.

Die Arbeitsweise der Mathematik wurde in Euklids "Elementen" begründet. Ausgehend von einigen *Axiomen* (Grundannahmen) und *Definitionen* werden nur durch logisches Schließen (*Beweise*) *Sätze* hergeleitet. Die Axiome und Definitionen müssen hierbei so eindeutig wie nur möglich gefaßt sein.

Eine ähnlich "strenge" Mathematik, wie sie Euklid mit seine Geometrie schon in der Antike betrieb, wurde in der Analysis erst im 19. Jahrhundert nach Einführung der Mengenlehre erreicht.

Die Sätze sind hierbei rein logisch betrachtet Tautologien zu den Axiomen und Definitionen, sie müssen für den beschränkten Verstand trotzdem entdeckt werden, und erleichtern die Arbeit mit den verschiedenen Theorien.

Die Menge aller Sätze ließe sich somit als Wahrheiten bezeichnen, die Menge aller Nicht-Sätze bzw. ungültigen Sätze als Falschheiten. Diese Annahme ist aber nicht ganz richtig, wie Gödel 1931 für zahlentheoretische Systeme zeigte. Es folgen nämlich aus den Axiomen, die der Zahlentheorie (die Theorie zur Grundschulmathematik) zugrunde liegen, Wahrheiten, die nicht beweisbar sind. (Als populäres Beispiel für solch einen Fall gilt die Aussage: "Dieser Satz ist nicht beweisbar.", der allerdings noch anfechtbar ist.) Auch wenn dies für die mathematischen Anwendungen meist als irrelevant gelten darf, so ist es doch eine große Enttäuschung für den Glauben an eine (vielleicht noch zu entdeckende) vollständige und reine Mathematik.

Es gibt kaum ein größeres Desinteresse von Mathematikern, als das gegenüber der Frage, was ihre Mathematik mit der Wirklichkeit zu tun hat. Die Frage macht nämlich nach einigen philosophischen Systemen keinen Sinn, da Mathematik als identisch mit Modellierung eines Abbildes der Wirklichkeit im menschlichen Geist (wie z.B. in der Physik) oder als ein völlig von der Realität abgelöstes Spiel betrachtet wird.

Um das Wesen der Mathematik zu klären, ist es hilfreich, ihre Rolle in der Erkenntnistheorie zu untersuchen.

Als Modell soll hier die "Drei-Welten-Theorie" von Karl Popper verwendet werden, die er innerhalb seiner Theorie des kritischen Rationalismus verwendet.

Zunächst unterteilt Popper die Schauplätze des Erkenntnisgewinns in drei "Welten".

1. die "reale Welt", die außerhalb und unabhängig vom Menschen existiert, und die nach Gesetzen funktioniert, für die unsere Physik eine gute Nährung darstellt.
2. die "Welt der subjektiven Empfindung", das ist der Bereich unserer sinnhaften Erfahrungen.
3. die "Welt der Theorien", in der sich die menschlichen Modelle der Wirklichkeit befinden.

Der Mensch steht in Welt 2 mittels seiner Sinne in Wechselwirkung mit Welt 1, d.h. er stellt Beobachtungen an und gewinnt Eindrücke über Welt 1, die allerdings durch die Sinne (oder auch schon durch Meßapparaturen) verfälscht worden sein können. Zu seinen Beobachtungen stellt er Theorien auf, die sich dann in Welt drei befinden. Diese Theorien unterliegen einem evolutionären Wettkampf in Welt 3, wobei der Mensch immer wieder versucht, Theorien durch Beobachtungen in Welt 1 zu falsifizieren und so ihre Anzahl zu reduzieren. Wichtig ist hierbei, daß Welt 1 und Welt 3 nur über die verfälschende Welt 2 in Kontakt stehen, wodurch absolute positive Aussagen nicht möglich sind (Falsifikationen sind es schon).

Popper selbst stellt die Mathematik als Dienstbotin der Physik und Grundlage aller Modelle in Welt 3, übersieht hierbei aber das Eigenleben der mathematischen Objekte, denn plötzlich ist es möglich, in Welt 3 selbst Entdeckungen zu machen (wie z.B. nach der Definition der natürlichen Zahlen die Primzahlen und ihre Eigenschaften), wobei diese Welt eigentlich nur falsifizierbare Aussagen über Welt 1 liefern sollte.

Ich möchte aus diesem Grund vorschlagen, die Mathematik als eine abstrakte Physik zu betrachten, als ein Zusammenspiel von gewissen Naturgesetzen. Hierbei entsprechen die Gesetze der Logik den physikalischen Gesetzen und die Sätze über bestimmte Objekte den z.B. durch Messungen genau bestimmten Eigenschaften eines Objektes. Die Wahl der Axiome und Definitionen entspricht der Wahl des physkalischen Systems, in dem man seine Messungen durchführt. Beweise wären nichts anderes, als die Berechnung von Meßergebnisse aus den physikalischen Gesetzen, denen ein bestimmtes System folgt, unter Berücksichtigung des physikalischen Systems. Hiernach gibt es also mathematische Naturgesetze, die bestimmte mathematische Szenarien (gegeben durch Axiome und Definitionen) denkbar werden lassen, und ihre Eigenschaften, die sich in den Sätzen wiederfinden, bestimmen.

physikalische Gesetze	Logik, teilweise auch Axiome
physikalische Systeme und Theorien	Axiome und Definitionen
physikalische Beobachtungen	Mathematischer Sätze
Berechnung von Beobachtungen	Beweise von Sätzen

Der Vorteil dieser ungewöhnlichen Betrachtungsweise liegt darin, daß die Mathematik nun ein Teil der Natur ist. Hierdurch wird auch klar, warum "die Natur in der Sprache der Mathematik geschrieben ist".

Plausibel wird dieses Bild, wenn man bedenkt, daß zwei Mathematiker ohne in irgendeiner Weise in Kontakt zu stehen, mit den selben Axiomen und Definitionen die selben Sätze erhalten werden, d.h. ohne einen Kontakt über Welt 2 oder Welt 3 werden die Welten 3 der beiden Mathematiker weitgehend gleich aussehen. Hierfür muß ein Transport der Information über Welt 1 existieren, was die Existenz von "wirklichen" mathematischen Gesetzen bedeutete. (Außerdem kann man sogar die Forderung nach den gleichen Axiomen und Definitionen fallen lassen, da die hypothetischen Mathematiker sie ohnehin sehr ähnlich wählen werden. Ein Beispiel hierfür ist der indische Mathematiker Ramanujan, der die höhere Mathematik nocheinmal selbständig entwickelte, ohne mehr als ein Schulbuch zur Mathematik zu kennen.)

Nicht vergessen sollte man außerdem, daß die Mathematik begonnen und betrieben wurde, um Aussagen über Welt 1 zu treffen. Wäre sie nur ein Objekt innerhalb unserer Theorien (Welt 3), warum sollte Welt 1 sich nach ihr richten?

Dem Argument, es finde sich einfach keine reale Entsprechung von bestimmten mathematischen Objekten, d.h. sie finden in keiner physikalischen Theorie Anwendung, ist zu entgegnen, daß das kräftefreie Teilchen, das wohl am häufigsten berechnete Modell in der Physik, ebenfalls in seiner isolierten Form in unserem Universum niemals beobachtet werden wird, und trotzdem werden nur wenige den Wirklichkeitsbezug dieser Berechnungen in Frage stellen.

Betrachtet man die Art, wie wir physikalische Gesetze gewinnen, nämlich durch Modellbildung zu physikalischen Beobachtungen, so gleicht sie der Art, mit der wir sehr wahrscheinlich die Gesetze der Logik lernen, allerdings schon als Kleinkinder, und damit noch unbewußt: Wir entdecken kausale Verbindungen zwischen Handlungen, und sind so in der Lage, die Gesetze der Logik zu extrahieren, etwa so: "Wenn ich laut genug schreie, werde ich gefüttert."; dies ist offenbar äquivalent zu "Wenn ich nicht gefüttert werde, habe ich nicht laut genug geschrien." Und schließlich hat diese Betrachtungsweise keinerlei Einfluß darauf, wie man Mathematik betreibt (abgesehen davon, daß vielleicht die Schönheit zurückgewonnen wird).

Diese Auffassung von Mathematik wird auch von dem französischen Mathematiker und Träger der Fields-Medaille Alain Connes geteilt: "Es gibt nur *eine* mathematische Welt, die zu erkunden die Aufgabe sämtlicher Mathematiker ist, und sie sind irgendwie alle im selben Boot."

4. Das Schöne in der Mathematik

"De gustibus non est disputandum"
(scholatische Weisheit)

Dieses Zitat sei vorangestellt, um daran zu erinnern, daß man natürlich über Geschmack streiten kann. Hier sollen lediglich einige Beispiele für das aufgezeigt werden, was an der Mathematik als schön empfunden werden kann.

Auf die in diesem Zusammenhang üblichen Darstellungen von Fraktalen wie Juliamengen etc. wollen wir verzichten. Ihre Schönheit beruht mehr im Bildhaften als im Mathematischen, und sie sind ohnehin mehr ein Beispiel dafür, wie die Kreativität der Natur funktioniert (und damit ein Indiz für die mathematischen Naturgesetze).

Zunächst aber noch eine Bemerkung zur Einfachheit, die oftmals gleichbedeutend mit Eleganz gesehen wird. Man könnte meinen, die Einfachheit eines Objektes (bzw. dessen Darstellung) komme der Trägheit des Menschen entgegen, möglichst wenig Aufwand zu investieren, und sei so mehr eine Art der Faulheit als ein Indiz für Schönheit. Vielmehr sollte Einfachheit als der Triumph des menschlichen Geistes über einen komplexen Sachverhalt gesehen werden, der diesen durch das einfache Objekt völlig beherrschbar gemacht hat. Neben den Verweis auf den erhabenen Verstand deutet eine mögliche Einfachheit auch immer auf die Klarheit der dahinterliegenden (göttlichen) Strukturen hin.

Beginnen wir zunächst mit den Beweisen. Als Beispiel diene hier Euklids Beweis, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, der eine Fülle von Ansatzpunkten bietet:

> *Euklidischer Beweis zur Unendlichkeit der Primzahlen (Widerspruchsbeweis):* Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ und sei $P = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ deren Produkt. Dann ist $P + 1$ größer als jede der Primzahlen p_i aber durch keine der p_i teilbar, da $\frac{P+1}{p_i} = z + \frac{1}{p_i}$ ist, wobei z eine ganze Zahl ist, $\frac{1}{p_i}$ aber zwischen 0 und 1 liegt. Somit können die p_i nicht alle Primzahlen sein.

- Schönheit in der Form des Beweises: Es ist ein sehr kurzer und einfacher, d.h. leicht verständlicher, Beweis.
- Schönheit in der Aussage: Sie ist absolut und fügt sich harmonisch in die Welt ein (ein endliche Anzahl von Primzahlen würde Zahlenbereiche unbegründet auszeichnen.)
- Schönheit in der Leistungsfähigkeit: Der Beweis behandelt Primzahlen, die sonst nur sehr schwer faßbar sind.
- Schönheit im Geheimnisvollen: Die Menge der Primzahlen selbst ist ein äußerst rätselhaftes Objekt, daß zwar scheinbar regellos ist, dessen Verteilungsdichte sich trotzdem wie $x/\log(x)$ für große x verhält (Gauß, 1792) geht.
- Schönheit in religiöser Dimension: Man erhält hier eindeutig eine Unendlichkeit, und obwohl diese eigentlich nicht faßbar ist, liefert der Beweis doch einen Hinweis auf ∞. (Dieses Symbol, die Lemniskate, besitzt selbst religiösen Ursprung)

Gerade die Unendlichkeit liefert immer wieder Überraschungen und erzeugt bei fehlerhaftem Umgang scheinbare Paradoxa, wie das berühmte von Zenon, bei dem es Achilles nicht gelingt, eine Schildkröte zu überholen. Die Lösung dieses Paradoxons steckt nicht zuletzt in den folgenden beiden Gleichungen, die auch gewisse Aspekte mathematischer Schönheit zeigen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Schönheit in der Form der Symbolik, die einen komplexen Sachverhalt einfach darzustellen vermag.
- Schönheit in der Aussage: Die erste Summe strebt gegen etwas unendlich Großes, obwohl etwas immer Kleineres hinzuaddiert wird, die andere unendliche Summe bleibt endlich, zumindest eine der Aussagen überrascht in der Regel und der “gesunde Menschenverstand” wird von diesen erhabenen Gleichungen in seine Schranken verwiesen.
- Schönheit in der Leistungsfähigkeit: Neben der Tatsache, daß wiedereinmal das unendlich große und das unendlich kleine erfaßt wurden, finden diese beiden Reihen vielfältige Anwendung in der Analysis.
- Schönheit im Geheimnisvollen: Das dem Verstand zunächst verschlossene Verhalten einer unendlichen Summe (die auch nur schwer vorstellbar ist), ist hier klar erfaßt.
- Schönheit in religiöser Dimension: Hierzu soll Jakob Bernoulli in einem Gedicht zu Wort kommen:

  Wie die unendliche Reihe sich fügt zur endlichen Summe
  Und der Grenze sich beugt, was dir grenzenlos scheint,
  So im bescheidenen Körper verbirgt der unendlichen Gottheit
  Spur sich, und grenzenlos wird, was doch so eng ist begrenzt.
  Welche Wonne, zu schau’n im Unermessenen das Kleine
  Und im Kleinen zu schau’n, ihn, den unendlichen Gott!”

Als ein weiteres Beispiel sei eine Formel von Euler gegeben, die oft von Mathematikern als sehr beeindruckend angesehen wird. Sie verknüpft alle Grundgrößen der komplexen Analysis miteinander:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$$

- Schönheit in der Form: Die herausragenden Größen (die Eulersche Zahl e, die Kreiszahl π, die imaginäre Einheit i, das multiplikativ-neutrale Element 1 und das additiv-neutrale Element 0) der Analysis werden in einer einfachen Summe miteinander verknüpft.

- Schönheit in der Aussage und Leistungsfähigkeit: Diese Formel ist ein Zwischenergebnis auf dem Weg zur Eulerschen Formel, die die Umwandlung der Exponentialfunktion in Cosinus- und Sinusfunktion zeigt.
- Schönheit im Geheimnisvollen: Besinnt man sich auf die ursprüngliche Definition der verwendeten Elemente (besonders e, π und i) so ist dieser Zusammenhang doch sehr überraschend.

Abschließend noch ein Beispiel aus der Physik, die ja nach obigem Modell der Mathematik sehr ähnlich ist. Es zeigt, wie die Maxwellschen Gleichungen, die grundlegenden Gesetze der Elektrodynamik, im Laufe der Zeit immer eleganter formuliert wurden. Sie lauten

$$
\begin{array}{lll}
\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \ , & \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \ , & \\
\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\dot{E}_x = \frac{4\pi}{c}j_x \ , & & \mathrm{d}^\dagger F = \frac{4\pi}{c}j \ , \\
\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{1}{c}\dot{E}_y = \frac{4\pi}{c}j_y \ , & \vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \ , & \\
\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{1}{c}\dot{E}_z = \frac{4\pi}{c}j_z \ , & & \\
\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \ , & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \ , & \\
\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{1}{c}\dot{B}_x = 0 \ , & & \mathrm{d}F = 0 \ , \\
\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{1}{c}\dot{B}_y = 0 \ , & \vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \ , & \\
\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{1}{c}\dot{B}_z = 0 \ , & &
\end{array}
$$

wobei die linke Spalte die Form darstellt, die Maxwell zu Beginn seiner Forschungen verwendete. Die mittlere Spalte ist die Form, in der Physikstudenten die Maxwellschen Gleichungen zuerst kennen lernen und die rechte Spalte ist die moderne Schreibweise mittels Differentialformen.

- Schönheit in der Form: Die Darstellung durch Operatoren vereinfacht die Schreibweise nicht nur, sondern zeigt deren innere Struktur auf.
- Schönheit in der Aussage: Die Gesetze sind Erhaben gegen jede Ergänzung, sie gelten absolut und sind vollkommen bzgl. des behandelten Gebietes.
- Schönheit in der Leistungsfähigkeit: Das Anwendungsspektrum dieser vier Gleichungen ist in der Physik enorm.
- Schönheit/Reiz im Geheimnisvollen: Ein ritualisierter Umgang mit Symbolen wie ∇, $\mathrm{d}^\dagger$, etc. repräsentiert eine tieferliegende Struktur der Gesetze.
- Schönheit in religiöser Dimension: Die Perfektion der Aussage und ihre Klarheit deuten auf die Perfektion einer dahinterliegenden realen "Naturkraft", die auf etwas Göttliches verweist.

5. Zusammenfassung und Anmerkungen

Mathematische Schönheit findet sich hauptsächlich auf drei Ebenen, die sehr eng miteinander verbunden sind:

Einmal auf der Ebene der Überraschung. Die faszinierendsten Beweise sind immer die, die man erst im letzten Satz versteht und dann auch gleich vollständig begreift. Das Erleben des Verständnisses gleicht einer Art Erleuchtung.

Die zweite Ebene ist die der Eleganz und Klarheit eines mathematischen Ergebnisses. Die Klarheit ist erleichternd und erzeugt das Gefühl, den Sachverhalt zu beherrschen. Oftmals kann der Grad an Eleganz und Klarheit überraschend sein.

Die dritte Ebene ist die der Struktur. Zusammenhänge zwischen Objekten zu erkennen, ist die Triebkraft aller Wissenschaft, und in keiner Wissenschaft wurden wohl so klar und streng Strukturen aufgezeigt, wie in der Mathematik. Diese Ebene ist es, die auf den harmonischen Kosmos und das Transzendente hinweist.

Eine vierte Ebene, die allerdings nicht wissenschaftlich faßbar ist, ist die der mystische Schönheit. Anhänger der Kabbala oder der Numerologie verleihen den mathematischen Objekten, vor allem den natürlichen Zahlen, erweiterte Bedeutung, deren paralleles Zusammenspiel auf mathematischer und erweiterter Ebene eine faszinierende Struktur und damit wieder eine gewisse Schönheit besitzt.

Die Schönheit in der Mathematik (und in der Wissenschaft) bietet uns nun zwei Seiten: Man darf Mathematik genießen, ohne als "gefühlskrank" gelten zu müssen. Neben dem Genuß bietet aber die Schönheit der Mathematik eine Abschätzung über die Richtigkeit eines Gedankens, noch bevor wir exakte logische Schlußfolgerungen gezogen haben. Diesen "Geschmack für das Wahre" verwendet natürlich unbewußt jeder Mathematiker, er muß aber gebildet werden, wie es z.B. auch für den musikalischen Geschmack gilt.

Abschließen soll noch erwähnt werden, daß Beweise bzw. Herleitungen in der Physik durchaus theatralische interpretiert werden dürfen, und hierdurch eine Art vierte Ebene der Schönheit gewinnnen, wie das folgende Zitat Ludwig Boltzmanns zeigt:

> "*Schönheit, höre ich Sie da fragen; entfliehen nicht die Grazien, wo Integrale die Hälse recken, kann etwas schön sein, wo dem Autor auch zur kleinsten äußeren Ausschmückung die Zeit fehlt? – Doch; gerade durch die Einfachheit, durch die Unentbehrlichkeit jedes Wortes, jedes Buchstabens, jedes Strichelchens kommt der Mathematiker unter allen Künstlern dem Weltenschöpfer am nächsten; sie begründet eine Erhabenheit, die in keiner Kunst ein Gleiches – Ähnliches höchstens in der symphonischen Musik hat. Erkannten doch schon die Pythagoräer die Ähnlichkeit der subjektivsten und der objektivsten der Künste – Ultima se tangunt. Und wie ausdrucksfähig, wie fein charakterisierend ist dabei die Mathematik. Wie der Musiker bei den ersten Takten Mozart, Beethoven, Schubert erkennt, so würde der Mathematiker nach wenigen Seiten seinen Cauchy, Gauß, Jacobi, Helmholtz unterscheiden. Höchste äußere Eleganz, mitunter etwas schwache Knochengerüste der Schlüsse charakterisiert die Franzosen, größte dramatische Wucht die Engländer, vor allem Maxwell. Wer kennt nicht seine dynamische Gastheorie? – Zuerst entwickeln sich majestätisch die Variationen der Geschwindigkeiten, dann setzen von der einen Seite die Zustandsgleichungen, von der anderen Seite die Gleichungen der Zentralbewegung ein, immer höher wogt das Chaos der Formeln; plötzlich ertönen die vier Worte: "Setze n=5" Der böse Dämon V verschwindet, wie in der Musik eine wilde, bisher alles unterwühlende Figur der Bässe plötzlich verstummt; wie mit einem Zauberschlag ordnet sich, was früher unbezwingbar schien. Da ist keine Zeit, zu sagen, warum diese oder jene Substitution gemacht wird; wer das nicht fühlt, lege das Buch weg; Maxwell ist kein Programmusiker, der über die Noten die Erklärung setzen muß. Gefügig speien nun die Formeln Resultat auf Resultat aus, bis überraschend als Schlußeffekt noch das Wärmegleichgewicht eines schweren Gases gewonnen wird und der Vorhang sinkt.*"